BAB V

PERSAMAAN LINEAR TINGKAT TINGGI

(HIGHER ORDER LINEAR EQUATIONS)

Bentuk Persamaan Linear Tingkat Tinggi :

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Diasumsikan $a_i(x)$ adalah kontinu (menerus) pada interval I.

Persamaan linear tingkat tinggi menarik untuk dibahas dengan 2 alasan :

- **Sering muncul dalam pendekatan perilaku fisika**
- **Persamaan PD II nonhomogen dengan koefisien constant, yakni $a_2y''+ a_1y'+a_0y = g(x)$, dapat dikonversi menjadi PD tingkat tinggi homogeny dengan koefisien konstant.**

Sebagai contoh, persamaan nonhomogen, $y'' = g$ dimana $g =$ percepatan gravitasi, dapat dideferensialkan untuk menghasilkan persamaan tingkat tinggi homogeny.

$y''' = 0$

Sama halnya, persamaan nonhomogen :

$y''' + 2y'' + 3y = x^2 + x + 1$

Dapat dideferensialkan tiga kali untuk mendapatkan persamaan tingkat lima

$y^{(5)} + 2y^{(4)} + 3y''' = 0$

<u>Notasi Operator</u>

Bila persamaan (1) diatas dinyatakan dalam notasi operator :

$L[y] = a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y$

Bila $y = y(x)$ dan turunan n pertama ada sepanjang interval I, maka operator diferensial L mentransformasikan $y(x)$ menjadi fungsi $L(y)$

Fungsi $L(y)$ dibentuk dengan menghasilkan turunan n pertama dari y dimana turunan ke nol menunjukkan fungsi y itu sendiri, kalikan setiap turunan dengan fungsi x

Contoh : operator diferensial

$L[y] = 2xy'' + (1 - 4x)y' + (2x - 1)y$

Transformasikan fungsi $y = e''$**; menjadi :**

$L[e^{2x}] = 2x(4e^{2x}) + (1 - 4x)(2e^{2x}) + (2x - 1)e^{2x}$

$\qquad = (2x + 1)e^{2x}$

Sifat khusus dari operator L **adalah linearitasnya. Hal ini berarti bila ada fungsi** $y_1(x)$ **dan** $y_2(x)$ **dan** C_1 **dan** C_2 **adalah konstan.**

$L[C_1y_1 + C_2y_2] = C_1L[y_1] + C_2L[y_2]$

Sifat linearnya :

1. Turunan dari jumlah suatu fungsi adalah penjumlahan dari turunan.

2. Turunan dari suatu konstanta dikalikan suatu turunan dari fungsi tersebut.

<u>Penyelesaian persamaan linear tingkat tinggi</u>

Dengan menggunakan notasi operator, persamaan

$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$

Dapat ditulis dalam bentuk

$L[y] = g(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

Persamaan (2) tersebut adalah fungsi menerus $y = \emptyset(x)$**, yang terdefinisi pada interval I, dimana operator** L **mentransformasi menjadi fungsi** $g(x)$

$L[\emptyset] = g(x)$**,**

Contoh : operator deferensial $L[y] = y'' - 3y' + 2y$

Mentransformasi fungsi $y = e^x$ **menjadi fungsi nol** $g(x) \equiv 0$

$L[e^x] = e^x - 3e^x + 2e^x = 0$

Ini berarti $y = e^x$**merupakan penyelesaian persamaan tangen** $L[y] = 0$

Theorema :

Bila $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots\ldots\ldots, a_1(x)$ dan $a_0(x)$ adalah menerus pada interval I , dan persamaan linear homogen tingkat n.

$$L[y] = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(3)$$

Memiliki penyelesaian n bebar linear $y_1(x), y_2(x), \ldots\ldots\ldots, y_n(x)$ pada I.

Juga, bila $y_1(x), y_2(x), \ldots\ldots\ldots, y_n(x)$ adalah solusi bebas linear dan bila $y(x)$ adalah penyelesaian persamaan (3), maka terdapat solusi unik constant $C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots C_n$ sedemikian rupa sehingga

$$y(x) = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$$

Catatan : Theorema diatas berlaku untuk persamaan linear dengan variabel koefisien konstant.

<u>Bebas Linear dan Wronskian</u>

Bila determinan

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. f_n'(x) \\ \cdots & \\ \cdots & \\ f_n^{n-1}(x) & f_2^{n-1}(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. f_n^{n-1}(x) \end{vmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Adalah tidak nol untuk paling tidak satu x di dalam interval I, maka fungsi $\{f_1(x), f_2(x) \ldots f_n(x)\}$ adalah bebas linear pada I.

Determinan (4) disebut Wronskian dari fungsi n dan ditulis/dinyatakan dengan

$$W[f_1(x), f_2(x) \ldots f_n(x)]$$

Contoh :

Bila a,b, dan c adalah bilangan riil yang berbeda, maka fungsi e^{ax}, e^{bx}, e^{cx} membentuk satu kumpulan bebas linier pada setiap interval. Hal ini karena :

$$W[e^{ax}, e^{bx}, e^{cx}] = \begin{vmatrix} e^{ax} & e^{bx} & e^{cx} \\ ae^{ax} & be^{bx} & ce^{cx} \\ a^2e^{ax} & b^2e^{bx} & c^2e^{cx} \end{vmatrix}$$

$$= e^{ax}e^{bx}e^{cx} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= e^{ax}e^{bx}e^{cx}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c^2-a^2)-(b+a)(c-a) \end{vmatrix}$$

$$= e^{ax}e^{bx}e^{cx}(b-a)(c-a)(c-b) \neq 0$$

Theorema

Bila $y_1, y_2, \dots\dots, y_n$ adalah solusi dari

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y^{(')} + a_0(x)y = 0$$

Dimana setiap istilah $a_i(x)$ adalah kontinu pada interval I. Maka, kumpulan $\{y_1, y_2, \dots\dots, y_n\}$ adalah bebas linear pada I jika dan hanya jika Wronskian $W[y_1, y_2, \dots\dots, y_n] \neq 0$ untuk semua x pada I.

Kesimpulan dari penjelasan sebelumnya tentang bebas linear dan solusi dasar → bila diasumsikan $y_1, y_2, \dots\dots, y_n$ adalah penyelesaian homogen, dimana setiap $a_i(x)$ adalah kontinu/menerus pada interval I, maka pernyataan berikut adalah ekuivalent

1. **$\{y_1, y_2, \dots\dots, y_n\}$ adalah kumpulan solusi dasar pada I.**
2. **$\{y_1, y_2, \dots\dots, y_n\}$ adalah bebas linear pada I.**
3. **$W[y_1, y_2, \dots\dots, y_n] \neq 0$ untuk paling tidak satu x_0 pada I.**
4. **$W[y_1, y_2, \dots\dots, y_n] \neq 0$ untuk setiap x pada I.**

OPERATOR POLYNOMIAL

Pada kasus khusus, koefisien fungsi pada PD tingkat ke-n adalah constant, operator deferensial L memerlukan bentuk tertentu. Karenanya, kita masukkan notasi operator turunan

$$D = \frac{d}{dx}$$

$D^2 \to \frac{d^2}{dx^2}$; $D^3 \to \frac{d^3}{dx^3}$; **sehingga**

$$L[y] = a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y$$

Dapat ditulis dalam bentuk

$$(a_n D^{(n)} + a_{n-1}D^{(n-1)} + \cdots + a_1 D + a_0)y.$$

Karena bentuk diatas seperti persamaan polynomial, maka kita dapat menulis sebagai

$$P(D)y = (a_n D^{(n)} + a_{n-1}D^{(n-1)} + \cdots + a_1 D + a_0)y$$

Dimana $a_n \neq 0$ dan a_i adalah constant.

PERSAMAAN BANTU

Anggap $a_0 \neq 0$, maka fungsi (x) :

$$y = -\frac{a_n}{a_0} y^{(n)} - \frac{a_{n-1}}{a_0} y^{(n-1)} \dots\dots\dots\dots\dots .. -\frac{a_1}{a_0} y^1$$

Bila $y = e^{rx}$ disubstitusi ke persamaan : $P(D)y = 0$

Maka $e^{rx}(a_n r^{(n)} + a_{n-1} r^{(n-1)} + \cdots + a_1 r + a_0) = 0$

Bagi dengan $e^{rx} \neq 0$ menghasilkan persamaan bantu :

$$a_n r^{(n)} + a_{n-1} r^{(n-1)} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$$

Derajat polynomial pangkat , memiliki n akar bilangan

Bila $r = m$ adalah bilangan akar real dari persamaan bantu, maka $r - m$ adalah factor dari persamaan

$$a_n r^{(n)} + a_{n-1} r^{(n-1)} + \cdots + a_1 r + a_0 = (r - m)Q(r)$$

Dimana $Q(r)$ adalah polynomial derajat $n - 1$.

Dalam kasus $r = \alpha + \beta_i$ adalah akar komplek, maka $r - \alpha - \beta_i$ dan $r - \alpha + \beta_i$ adalah factor persamaan bantu.

$$(r - \alpha - \beta_i)(r - \alpha + \beta_i) = r^2 - 2\alpha r + \alpha^2 + \beta^2$$

Sehingga untuk akar kompleks

$$a_n r^{(n)} + a_{n-1} r^{(n-1)} + \cdots + a_1 r + a_0 = (r^2 - 2\alpha r + \alpha^2 + \beta^2)Q(r)$$

Dimana $Q(r)$ adalah polynomial derajat $n - 2$.

Bila $r = m$ adalah akar persamaan bantu, maka

$$P(D) = (D - M)\, Q(r)$$

AKAR POLINOMIAL

Contoh : $r^4 - 16 = 0$

$$(r^4 - 4)(r^4 + 4) = 0$$

$$(r + 2)(r - 2)(r^4 + 4) = 0$$

$r = \pm 2$

$r = \pm 2\, i$

Contoh : $2\,r^3 - 4r^2 - 2\,r + 4 = 0$

Bagi dengan koefisien $a_3 = 2$ **menghasilkan**

$$
\begin{array}{r|l}
 & r^2 - r - 2 \\
\hline
r - 1 & r^3 - 2r^2 - r + 2 \\
 & r^3 - 2r^2 \\
\hline
 & -r^2 - r \\
 & -r^2 + r \\
\hline
 & -2\,r + 2 \\
 & -2\,r + 2 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Maka :

$$r^3 - 2\,r^2 - r + 2 = (r - 1)(r^2 - r - 2)$$

$$= (r - 1)(r + 1)(r - 2\,)$$

$r = 1$; $r = -1$; $r = 2$

<u>Akar Bilangan Real</u>

Bila persamaan bantu memiliki n **akar bilangan riil maka :** $e^{r_1 x} e^{r_2 x} e^{r_n x}$

Adalah solusi persamaan diferensial homogen $P(D)y = 0$ **; sehingga solusi umumnya adalah**

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \cdots + C_n e^{r_n x}$$

Contoh : selesaikan persamaan diferensial berikut :

$$2\,y''' - 4y'' - 2\,y' + 4y = 0$$

Solusi :

Persamaan bantunya menjadi

$2\,r^3 - 4r^2 - 2\,r + 4 = 0$ **;bagi dengan 2**

$r^3 - 2\,r^2 - r + 2 = 0$

$(r - 1)(r + 1)(r - 2) = 0$

$r = -1, 1, 2$

Sehingga solusi umumnya adalah

$\|y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_n e^{2x}\|$

Akar Bilangan riil yang berulang

Bila $r = m$ adalah akar persamaan bantu yang berulang k kali ; maka $(D - m)^k$ adalah factor polynomial operator :

$P(D)y = (D - m)^k Q(D)y$

Sehingga solusi umumnya adalah

$\|y = C_1 e^{mx} + C_2 x e^{mx} + C_n x^2 e^{mx} + \cdots + C_k x^{k-1} e^{mx}\|$

Contoh : selesaikan persamaan diferensial berikut :

$y''' - 9y'' + 27y' - 27y = 0$

Solusi :

Persamaan bantu

$r^3 - 9r^2 + 27r - 27 = 0 = (r - 3)^3$

$r = 3, 3, 3$;

Solusi umum

$\|y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + C_n x^2 e^{3x}\|$

Akar Kompleks

Bila akar persamaan bantu adalah bilangan kompleks maka solusi umumnya adalah

- **Bila** $r = \pm\beta_1 i$, $r = \pm\beta_2 i$, … … . , $r = \pm\beta_k i$
  $\|y = C_1 \cos\beta_1 x + C_2 \sin\beta_1 x + C_3 \cos\beta_2 x + C_4 \sin\beta_2 x + \cdots + C_{n-1} \cos\beta_k x + C_n \sin\beta_k x\|$
- **Bila** $r = \alpha_1 \pm \beta_1 i$, $r = \alpha_2 \pm \beta_2 i$, $r = \alpha_k \pm \beta_k i$

  $\|y = e^{\alpha_1 x}(C_1 \cos\beta_1 x + C_2 \sin\beta_1 x) + e^{\alpha_2 x}(C_3 \cos\beta_2 x + C_4 \sin\beta_2 x) + \cdots + e^{\alpha_k x}(C_{n-1} \cos\beta_k x + C_n \sin\beta_k x)\|$

Akar kompleks yang berulang

Bila akar persamaan bantu adalah bilangan kompleks yang berulang maka solusi umumnya adalah $r = \alpha \pm \beta i$ (berulang k kali)

$$\|y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + x e^{\alpha x}(C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + \cdots + x^{k-1} e^{\alpha x}(C_{n-1} \cos \beta x + C_n \sin \beta x)\|$$

Contoh :

$y^{(4)} - 2y'' + y = 0$

Persamaan bantu $r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2 + 1)^2 = 0$

$r = \pm i \ , \pm i$

Maka solusinya adalah :

$\|y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos x + C_4 \sin x + C_4 \sin x\|$