BAB III
TRANSFORMASI LAPLACE

Penyelesaian persamaan sebelumnya mengandung beberapa konstanta integrasi anu (Unknown-tidak diketahui) seperti A,B,C, dst. Nilai konstanta tersebut dapat diperoleh dengan penerapan nilai-nilai batas.

Metoda lain untuk mencari konstanta integrasi adalah dengan TRANSFORMASI LAPLACE (Laplace Transform).

Jika $f(x)$ adalah suatu pernyataan dalam x yang terdefinisi untuk $x \geq 0$, maka transformasi laplace dari $f(x)$, didefinisikan sebagai:

$$L\{f(x)\} = \int_{x=0}^{\sim} e^{-sx} f(x)dx$$

Dimana s adalah suatu variabel yang nilainya dipilih sedemikian rupa agar integral semi infinitnya selalu konvergen.

Missal ; bila $f(x) = 2$ untuk $x \geq 0$

Maka $\rightarrow L\{2\} = \int_{x=0}^{\sim} e^{-sx}\, 2dx \;= 2\left[\frac{e^{-sx}}{-s}\right]_{x=0}^{\sim}$

$= 2(0 - \left(-\frac{1}{s}\right) = \frac{2}{s}$ **asalkan** $s > 0$

Bila $s < 0$ maka $e^{-sx} \rightarrow \sim$ ketika $x \rightarrow \sim$ dan jika $s = 0$ maka $L\{2\}$ tidak terdefinisikan

Sehingga $L\{2\} = \frac{2}{s}$ asalkan $s > 0$

Bila k adalah konstanta sembarang, maka

$L\{k\} = \frac{k}{s}$ **asalkan** $s > 0$

Bila $f(x) = e^{-kx}$, $x \geq 0$; maka

$$L\{e^{-kx}\} = \int_{x=0}^{\sim} e^{-sx}\, e^{-kx}\, dx \;=\; \int_{x=0}^{\sim} e^{-(s+k)x}\, dx$$

$$= \left[\frac{e^{-(s+k)x}}{-(s+k)}\right]_{x=0}^{\sim} = \left(0 - \left(-\frac{1}{s+k}\right)\right); s + k > 0$$

$= \frac{1}{s+k}$ **asalkan** $s + k > 0 \quad \rightarrow s > -k$

$\therefore$Agar transformasi laplace bisa ada maka integral $e^{-sx} f(x)$ harus konvergen ke nol ketika $x \rightarrow \sim$

Transformasi Laplace Invers

Transformasi Laplace adalah suatu pernyataan dalam variabel s yang dinotasikan dengan $F(s)$.

$f(x)$dan $F(s) = L\{f(x)\}$ membentuk suatu pasangan transformasi (transform fair). Ini berarti jika $F(s)$ adalah transformasi laplace dari $f(x)$maka $f(x)$adalah transformasi laplace invers dari $F(s)$,
$f(x) = L^{-1}\{F(s)\}$
Jika $f(x) = 4$ maka transformasi laplace-nya
$$L\{f(x)\} = F(s) = \frac{4}{s}$$
Jadi jika $F(s) = \frac{4}{s}$;maka transformasi laplace inversnya
$$L^{-1}\{F(s)\} = f(x) = 4$$

Transformasi Laplace dari suatu turunan

$$L\{f(x)\} = \int_{x=0}^{\sim} e^{-sx} f'(x)dx = \int_{x=0}^{\sim} u(x)dv(x)$$
$$= [u(x)v(x)]_{x=0}^{\sim} - \int_{x=0}^{\sim} v(x)du(x)$$
$$u(x) = e^{-sx} \quad \to du(x) = -s\, e^{-sx} dx$$
$$dv(x) = f'(x)dx \quad \to v(x) = f(x)$$
$$L\{f'(x)\} = [e^{-sx} f(x)]_{x=0}^{\sim} + s \int_{x=0}^{\sim} e^{-sx} f(x)dx$$
$= \big(0 - f(0)\big) + sF(s)$ **jika** $e^{-sx} f(x) \to 0$ **kalau** $x \to 0$
$$\therefore\ L^{-1}\{F(s)\} = sF(s) - f(0).$$

Contoh: Tentukan masalah nilai awal sebagai berikut :
$y' - 4y = e^{3t}$; dimana $y(0) = 1$
Solusi: $L\{y' - 4y\} = L\{e^{3t}\}$
$$L\{y'\} - 4L\{y\} = \frac{1}{s-3}$$
$$S\,.\,Y(s) - y(0) - 4Y(s) = \frac{1}{s-3}$$
Karena $y(0) = 1$
$$S\,.Y(s) - 1 - 4Y(s) = \frac{1}{s-3}$$

$$Y(s)(s-4) = \frac{1}{s-3} + 1$$
$$Y(s) = \frac{1}{(s-3)(s-4)} + \frac{1}{s-4}$$
Dari dekomposisi fraksi partial $\rightarrow \frac{1}{(s-3)(s-4)} = -\frac{1}{s-3} + \frac{1}{s-4}$

Maka: $Y(s) = \frac{1}{(s-3)(s-4)} + \frac{1}{s-4} = -\frac{1}{s-3} + \frac{1}{s-4}$

$Y(s)$ **adalah transformasi laplace dari fungsi** $y(t)$

Bagaimana mendapatkan $y(t)$**?**

Sesuai dengan aturan fungsi exponensial.

$L\{e^{3t}\} = \frac{1}{s-3}$ **dan** $L\{e^{4t}\} = \frac{1}{s-4}$

$$L\{y(t)\} = Y(s) = -\frac{1}{s-3} + \frac{2}{s-4}$$
$$= -L\{e^{3t}\} + 2L\{e^{4t}\} = L\{-e^{3t} + 2e^{4t}\}$$
$$\| y(t) = -e^{3t} + 2e^{4t} \|$$

Check solusi $\rightarrow$

$y(t) = -e^{3t} + 2e^{4t} \rightarrow y' = -3e^{3t} + 8e^{4t}$

$y' - 4y = -3e^{3t} + 8e^{4t} + 4e^{3t} - 8e^{4t} = e^{3t}$

$y' - 4y = e^{3t}$

Juga $y(0) \rightarrow y(t) = -e^{3t} + 2e^{4t}$

$y(0) = -e^{0} + 2e^{0} = 1$ $\rightarrow$ **sesuai dengan soal**

<u>Dua Sifat Transformasi Laplace</u>

Transformasi Laplace dan inversnya kedua-keduanya adalah transformasi linear.

(1) Transformasi dari suatu jumlah (atau selisih) dari pertanyaan adalah jumlah (atau selisih) dari masing-masing transformasi itu sendiri:

$L\{f(x) \pm g(x)\} = L\{f(x)\} \pm L\{g(x)\}$

$L^{-1}\{F(s) \pm C_{+}(s)\} = L^{-1}\{F(s)\} \pm L^{-1}\{C_{+}(s)\}$

(2) Transformasi dari suatu pernyataan yang dikalikan dengan konstanta adalah konstanta tersebut dikalikan dengan transformasi dari pernyataan tersebut.

$L\{kf(x)\} = kL\{f(x)\}$ **dan** $L^{-1}\{kF(s)\} = kL^{-1}\{F(s)\}$

Dimana $k =$ **konstanta.**

Contoh:

Cari transformasi laplace dari kedua sisi untuk persamaan
$f'(x) + f(x) = 1$ **; dimana** $f(0) = 0$
pernyataan diatas identik dengan $y' + y = 1 \rightarrow y(0) = 0$
Solusi:
$L\{f'(x) + f(x)\} = L\{1\}$
$L\{f'(x)\} + L\{f(x)\} = L\{1\}$
$$[s.F(s) - f(0)] + F(s) = \frac{1}{s}$$
$(s+1)F(s) - f(0) = \frac{1}{s}$ **dengan syarat** $f(0) = 0$**, maka**
$$(s+1)F(s) = \frac{1}{s} \rightarrow F(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$
Dengan menggunakan pecahan persial
$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} \rightarrow 1 = A(s+1) + B(s)$$
$A = 1$ **dan** $B = -1$ **sehingga** $F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$
Karena $f(x) = L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right\}$
$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$
$f(x) = 1 - e^{-x}$

<u>Membuat Transformasi Baru</u>

Untuk memperoleh transformasi laplace dari $f(x)$ terkadang harus melakukan integrasi perbagian, kadangkala berulang-ulang. Akan tetapi, karena $L\{f'(x)\} = sL\{f(x)\} - f(0)$, proses pengulangan dapat dihindari jika diketahui turunan $f'(x)$.
Contoh: bila $f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$**; dan** $f(0) = 0$
Sehingga $L\{f'(x)\} = sL\{f(x)\} - f(0)$
Kita akan memperoleh
$L\{1\} = s\,L\{x\} - 0$
$$\frac{1}{s} = sL\{x\} \rightarrow L\{x\} = \frac{1}{s^2}$$
Tentukan transformasi laplace dari $f(x) = x^2;\ f(0) = 0$
$f(x) = x^2, \rightarrow f'(x) = 2x$ **dan** $f(0) = 0$
$L\{f'(x)\} = sL\{f(x)\} - f(0)$
$L\{2x\} = sL\{f(x^2)\} - 0$
$$2L\{x\} = sL\{x^2\} \rightarrow \frac{2}{s^2} = sL\{x^2\}$$
$$L\{x^2\} = \frac{2}{s^3}$$

Tentukan $f(x) = x.e^{-x}, f'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$ dan $f(0) = 0$

$L\{f'(x)\} = sL\{f(x)\} - f(0)$

$L\{e^{-x} - xe^{-x}\} = sL\{xe^{-x}\} - 0$

$L\{e^{-x}\} - L\{xe^{-x}\} = sL\{xe^{-x}\}$

$L\{e^{-x}\} = (s+1)L\{xe^{-x}\}$

$\frac{1}{s+1} = (s+1)L\{xe^{-x}\} \quad \rightarrow L\{xe^{-x}\} = \frac{1}{(s+1)^2}$

Transformasi Laplace dari turunan yang lebih tinggi

Misal $F(s)$ dan $C_+(s)$ adalah transformasi laplace dari $f(x)$ dan $g(x)$. Maka:

$L\{f(x)\} = F(s) \ \rightarrow \ L\{f'(x)\} = sF(s) - f(0)$

$L\{g(x)\} = C_+(s) \ \rightarrow \ L\{g'(x)\} = C_+(s) - g(0)$

Misal $g(x) = f'(x)$ sehingga $L\{g(x)\} = L\{f'(x)\}$ dimana

$g(0) = f'(0)$ dan $C_+(s) = sF(s) - f(0)$

Karena $g(x) = f''(x)$.

Berarti $L'\{g'(x)\} = L\{f''(x)\} = sC_+(s) - g(0)$

$= s[sF(s) - f(0) - f'(0)$

$L\{f''(x)\} = s^2F(s) - sF(0) - f'(0)$

Dengan cara yang sama

$L\{f'''(x)\} = s^3F(s) - s^2f(0) - f'(0) - f''(0)$

$L\{f^4(x)\} = s^4F(s) - s^3f(0) - s^2f(0) - f'(0) - f''(0) - f'''(x)$

Transformasi Laplace dari $f(x) = sinkx$

$f(x) = sinkx, f'(x) = k\,coskx, f''(x) = -k^2sinkx$

$f(0) = 0$ dan $f'(0) = k$

$L\{f''(x)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$ dimana $F(s) = L\{f(x)\}$

$L\{-k^2sinkx\} = s^2L\{f(x)\} - s0 - k$

$-k^2L\{sinkx\} = s^2L\{sinkx\} - k$

$(s^2 + k^2)\ L\{sinkx\} = k \quad \rightarrow \ L\{sinkx\} = \frac{k}{s^2+k^2}$

Transformasi Laplace dari $f(x) = cos\ kx$

$f(x) = cos\ kx, f(x) = -k\,sinkx, f''(x) = -k^2coskx$

$f(0) = 1$ dan $f'(0) = 0$

$L\{f''(x)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$ dimana $F(s) = L\{f(x)\}$

$L\{-k^2coskx\} = s^2L\{cos\ kx\} - s.1 - 0$

$-k^2L\{coskx\} = s^2L\{coskx\} - s$

$(s^2 + k^2)\ L\{coskx\} = s \quad \rightarrow \ L\{coskx\} = \frac{s}{s^2+k^2}$

Persamaan-persamaan diferensial yang linear, berkoefisian konstan, nonhomogen

Transformasi Laplace dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan berikut:

$$a_n f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_2 f''(x) + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = g(x)$$

Dimana $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0 =$ konstanta yang diketahui $g(x) =$pernyataan dalam x yang diketahui, nilai dari $f(x)$ dan turunannya diketahui pada $x = 0$; persamaan jenis ini disebut: persamaan diferensial, linear, koefisien-konstanta, non homogen.

Nilai-nilai dari $f(x)$ dan turunannya pada $x = 0$ disebut sebagai syarat batas.

Tentukan penyelesaian dari:

$f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = 4x$ **; dimana** $f(0) = f'(0) = 0$

(a). Cari transformasi laplace dari kedua sisi persamaan

$$L\{f''(x)\} + 3L\{f'(x)\} + 2L\{f(x)\} = 4L\{x\}$$

$$[s^2F(s) - sf(0) - f'(0)] + 3[sF(s) - f(0)] + 2F(s) = \frac{4}{s^2}$$

(b). Cari pernyataan $F(s) = L\{f(x)\}$ dalam bentuk pecahan aljabar substitusi nilai $f(0)$ dan $f'(0)$

$$(s^2 + 3s + 2)F(s) = \frac{4}{s^2} \quad \rightarrow F_s = \frac{4}{s^2(s+1)(s+2)}$$

(c). Pecahan dalam bentuk pecahan parsial

$$\frac{4}{s^2(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s+2}$$

$$4 = As(s+1)(s+2) + B(s+1)(s+2) + Cs^2(s+1)(s+2) + Ds^2(s+1)$$

Jika $s = 0 \rightarrow 4 = 2B \rightarrow B = 2$

$s = -1 \rightarrow 4 = C(-1)^2(-1+2) = C \rightarrow C = 4$

$s = -2 \rightarrow 4 = D(-2)^2(-2+1) = -4D \rightarrow D = -1$

Samakan koefisien-koefisien dari s

$0 = 2A + 3B = 2A + 6 \rightarrow A = -3$

$$F(s) = -\frac{3}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{4}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}$$

(d). Gunakan hasil sebelumnya untuk mencari $L^{-1}\{F(s)\}$.

$$f(x) = -3 + 2x + 4e^{-x} - e^{-2x}$$