BAB II

PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE-KEDUA

Persamaan diferensial orde-kedua berbentuk

$$a.\frac{d^2y}{dx^2} + b\,\frac{dy}{dx} + c\,y = f(x) \qquad \rightarrow ay'' + by' + c\,y = f(x)$$

- **Kasus pertama** $\rightarrow$ **bila** $f(x) = 0$ **; maka**

  $ay'' + by' + c\,y = 0$ **;misalkan** $y = u$ **dan** $y = v$ **;** $(u$ **dan** v **fungsi dari** $x)$

  $\therefore a.\ \frac{d^2u}{dx^2} + b\frac{du}{dx} + c\,u = 0$ **dan** $a.\frac{d^2v}{dx^2} + b\frac{dv}{dx} + c\,v = 0$

  Dengan menjumlahkan kedua persamaan di atas, kita dapatkan

  $$a\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2v}{dx^2}\right) + b\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\right) + c\,(u + v) = 0$$

  $\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ **dan** $\frac{d^2}{dx^2}(u + v) = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2v}{dx^2}$

  Sehingga persamaan di atas dapat ditulis:

  $$a\,\frac{d^2}{dx^2}(u + v) + b\frac{d}{dx}(u + v) + c(u + v) = 0$$

  Merupakan persamaan awal dengan $y = u + v$

  Artinya jika $y = u$ **dan** $y = v$ **adalah penyelesaian persamaan**

  $a\,\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + c\,y = 0$ **;maka begitu juga** $y = u + v$

- **Persamaan sebelumnya** $a\,\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + c\,y = 0$ **; jika** $a = 0$, **kita dapatkan persamaan orde pertama dari kelompok yang sama :**

  $b\frac{dy}{dx} + c\,y = 0$ **atau** $\frac{dy}{dx} + ky = 0$ **; dimana** $k = \frac{c}{b}$

  Dengan metode pemisahan variabel, kita dapatkan

  $$\frac{dy}{dx} = -ky \quad \rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int k\,dx$$

  $\ln y = -kx + c \quad \rightarrow y = e^{-kx+c} = e^{-kx}.e^{c}$

  $y = A.e^{-kx}$ **(karena** e^{c} **adalah konstanta)**

  Bila $m = -k \quad \rightarrow \; y = A.e^{m}$

  Dengan cara yang sama, $y = A.e^{m}$ **akan menjadi penyelesaian dari persamaan orde-kedua**

  $a\,\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + c\,y = 0$ **;jika** $y = A.e^{m} \quad \rightarrow \frac{dy}{dx} = A.m e^{m}$

  $$\frac{d^2y}{dx^2} = A.m^2.e^{m}$$

Dengan mensubstitusi kita dapatkan

$$a.A.m^2.e^{m} + b.A.me^{m} + c.A.e^{m} = 0$$

Bila kedua sisi dibagi dengan $A.e^{m}$, maka

$am^2 + bm + c = 0$ → **persamaan kuadratik yang menghasilkan dua nilai m. kita sebut $m = m_1$ dan $m = m_2$**

Sehingga $y = A.e^{m_1x}$ dan $y = B.e^{m_2x}$ adalah dua penyelesaian bagi persamaan tersebut.

Maka:

∴ jika $y = u$ dan $y = v$ adalah dua penyelesaian

Maka $y = u + v$ juga merupakan penyelesaian

∴ jika $y = A.e^{m_1x}$ dan $y = B.e^{m_2x}$

Mak $y = A.e^{m_1x} + B.e^{m_2x}$a juga merupakan penyelesaian

Maka penyelesaian dari $a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + c\,y = 0$adalah $y = A.e^{m_1x} + B.e^{m_2x}$

A dan B = konstanta sembarang, m_1 dan m_2 = akar-akar dari persamaan kuadratik $am^2 + bm + c = 0$

Persamaan kuadratik ini disebut <u>persamaan karakteristik</u> $m^2 = \frac{d^2y}{dx^2}$; $m = \frac{dy}{dx}$

Contoh: untuk persamaan $\frac{d^2y}{dx^2} + 7\frac{dy}{dx} + 12y = 0$

Persamaan karakteristik → $m^2 + 7m + 12 = 0$

$(m + 4)(m + 3) = 0$ → $m = -4$ **dan** $m = -3$

Maka penyelesaian dari $\frac{d^2y}{dx^2} + 7\frac{dy}{dx} + 12y = 0$ adalah

∴ $y = A.e^{-4x} + B.e^{-3x}$

- **Akar-akar yang real dan berbeda untuk persamaan karteristik**

  Contoh: $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

  Persamaan karakteristik → $m^2 - 5m + 6 = 0$

  $(m - 3)(m - 2) = 0$ → $m = 3$ & $m = 2$

  Penyelesaian → $y = A.e^{3x} + B.e^{2x}$

- **Akar-akar yang real dan sama untuk persamaan karakteristik**

  Contoh: $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 9y = 0$

  Persamaan karakteristik → $m^2 - 6m + 9 = 0$

  $(m - 3)(m - 3) = 0$ → $m = 3$ & $m = 3$

  Penyelesaian → $y = A.e^{3x} + B.e^{3x}$

  Kedua suku di atas dapat dinyatakan sebagai:

  $y = C.e^{3x}$

  Tapi setiap persamaan orde-kedua mempunyai dua buah konstanta. Jadi harus ada suku lain yang membuat konstanta kedua.

Sehingga penyelesaian umumnya menjadi $y = A.e^{3x} + B.e^{3x}$

Dengan kata lain $y = e^{m_1 x}(A + Bx)$ adalah penyelesaian persamaan diferensial jika persamaan karakteristik mempunyai akar yang real dan sama.

Contoh: $\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} + 16y = 0$

PK = Persamaan karakteristik $\rightarrow m^2 + 8m + 16 = 0$

$$(m + 4)(m + 4) = 0$$

$m = -4$ & $m = -4$

$\therefore y = e^{-4x}(A + Bx)$

- **Akar-akar kompleks untuk persamaan karakteristik**

Bila PK adalah bilangan kompleks, maka

$m = \alpha \pm j\beta \quad \rightarrow m_1 = \alpha + j\beta$ dan $m_2 = \alpha - j\beta$

Maka penyelesaian adalah

$y = Ce^{(\alpha + j\beta)x} + De^{(\alpha - j\beta)x}$

$\quad = Ce^{\alpha x}.e^{j\beta x} + De^{\alpha x}.e^{-j\beta x} = e^{dx}\left\{Ce^{j\beta x} + De^{-j\beta x}\right\}$

Dari bentuk bilangan kompleks diketahui:

$e^{jx} = \cos x + j \sin x$

$e^{-2x} = \cos x - j \sin x$

$\downarrow$

$e^{j\beta x} = \cos \beta x + j \sin \beta x$

$e^{-j\beta x} = \cos \beta x - j \sin \beta x$

Maka penyelesaian $y = e^{\alpha x}(Ce^{j\beta x} + De^{-j\beta x})$

dapat ditulis sebagai

$y = e^{\alpha x}\{C(\cos \beta x + j \sin \beta x) + D(\cos \beta x - j \sin \beta x)\}$

$\quad = e^{\alpha x}\{(C + D)\cos \beta x + j(C - D)\sin \beta x\}$

Bila $A = C + D$; dan $B = j(C - D)$; maka

$y = e^{\alpha x}\{A\cos \beta x + B\sin \beta x\}$

Contoh: selesaikan $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 9y = 0$

PK $\rightarrow m^2 + 4m + 9 = 0$

$$m = \frac{-4 \pm \sqrt{-20}}{2} = \frac{-4 \pm 2j\sqrt{5}}{2} = -2 \pm j\sqrt{5}$$

$\alpha = -2$; $\beta = \sqrt{5}$

Penyelesaian:

$y = e^{-2x}\left[A\cos \sqrt{5}x + B\sin \sqrt{5}x\right]$

Bila persamaan berbentuk $\frac{d^2y}{dx^2} \pm n^2y = 0$

Adalah kasus dari persamaan:

$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + c\ y = 0 \quad \rightarrow$dengan $b = 0$

$a\frac{d^2y}{dx^2} + c\ y = 0 \quad \rightarrow \frac{ad^2y}{adx^2} + \frac{c}{a}y = 0$; dapat ditulis sehingga: $\frac{d^2y}{dx^2} \pm n^2y = 0$

(a) bila $\frac{d^2y}{dx^2} \pm n^2y = 0 \quad \rightarrow\ m^2 + n^2 = 0\ \rightarrow m^2 = -n^2$

$m = \pm j\ n$

Ini sama dengan $m = \alpha \pm j\ \beta \quad \rightarrow \alpha = 0\ ;\ \beta = \sim$

$\therefore y = A\ c\ os\ x + Bs\ i\ n\ nx$

$(b)\ \frac{d^2y}{dx^2} - n^2y = 0 \rightarrow m^2 - n^2 = 0\ \rightarrow m^2 = n^2\ \rightarrow m = \pm n$

$\therefore y = Ce^{nx} + De^{-nx}$

Dari fungsi hiperbolik

$c\ os\ h\ x = \frac{e^{nx} + e^{-nx}}{2} \quad \rightarrow e^{nx} + e^{-nx} = 2\ c\ os\ h\ x$

$s\ i\ n\ h\ x = \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{2} \quad \rightarrow e^{nx} - e^{-nx} = 2\ s\ i\ n\ h\ x$

Penjumlahan persamaan diatas $\rightarrow 2\ e^{nx} = 2\ c\ os\ h\ x + 2\ s\ i\ n\ h\ x$

$\therefore e^{nx} = c\ os\ h\ x + s\ i\ n\ h\ x$

Sehingga $= Ce^{nx} + De^{-nx}$; dapat ditulis sebagai:

$y = C(c\ os\ h\ x + s\ i\ n\ h)x + D(c\ os\ h\ x - s\ i\ n\ h\ x)$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = 0 \quad \rightarrow y = A\ c\ os\ nx + B\ c\ os\ nx$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} - n^2y = 0 \quad \rightarrow y = A\ c\ os\ h\ nx + B\ c\ os\ h\ nx$

Contoh:

- $\frac{d^2y}{dx^2} + 16y = 0 \quad \rightarrow m^2 = -16\ ; m = \pm j\ 4$

$y = A\cos 4x + B\cos 4x$

- $\frac{d^2y}{dx^2} - 3y = 0 \quad \rightarrow m^2 = 3; m = \pm \sqrt{3}$

$y = A\cos\sqrt{3}x + B\cos\sqrt{3}x$

Kasus sebelumnya:

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + c\,y = f(x) \quad \rightarrow f(x) = 0$$

Bila $(x) \neq 0$; bagaimana?

Dalam persamaan $a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + c\,y = f(x)$, substitusi $y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x}$ akan membuat sisi kiri diatas sama dengan nol. Karena itu harus ada satu suku tambahan dalam penyelesaiannya yang membuat sisi sama dengan $f(x)$bukan nol. Maka:

$y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x} + X$ **; $X =$ fungsi tambahan**

$y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x}$ **$\rightarrow$ fungsi komplementer (FK)**

$y = x$ **(sebuah fungsi) $\rightarrow$ integral khusus (IK)**

Contoh : selesaikan $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = x^2$

*** FK $\rightarrow$ sisi kiri sana dengan nol**

$$m^2 - 5m + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad (m - 2)(m - 3) = 0$$

$$m = 2 \;\&\; m = 3$$

FK $\rightarrow y = Ae^{2x} + Be^{3x}$

*** IK (Integral Khusus) $\rightarrow$ fungsi derajat dua**

Misal $y = Cx^2 + Dx + E$

$$\frac{dy}{dx} = 2Cx + D \quad \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 2C$$

Substitusi ke persamaan diatas

$2C - 5(2C + D) + 6(Cx^2 + Dx + E) = x^2$

$2C - 10Cx - 5D + 6Cx^2 + 6Dx + 6E = x^2$

$6Cx^2 - (6D - 10C)x + (2C - 5D + 6E) = x^2$

$6C = 1 \quad \rightarrow C = \frac{1}{6}$

$6D - 10C = 0 \quad \rightarrow D = \frac{5}{18}$

$2C - 5D + 6E = 0 \quad \rightarrow E = \frac{19}{108}$

Penyelesaian Umum: $y = FK + IK = Ae^{2x} + Be^{3x} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{19}{108}$

Menentukan nilai-nilai konstanta

Jika $f(x) = k$	**asumsikan** $y = C$
$f(x) = kx$	$y = Cx + D$

$f(x) = kx^2$ $\quad y = Cx^2 + 0x + E$

$f(x) = k\,sin\,x$ atau $k\,cos\,x$ $\quad y = C\,cos\,x + D\,sin\,x$

$f(x) = k\,sin\,h\,x$ atau $k\,cos\,h\,x$ $\quad y = C\,cos\,h\,x + D\,sin\,h\,x$

$f(x) = e^{kx}$ $\quad y = Ce^{kx}$

Contoh:

Selesaikanlah $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 2\,sin\,4x$

$FK \rightarrow m^2 - 5m + 6 = 0 \rightarrow (m-2)(m-3) = 0$

$m = 2 \; \& \; m = 3$

$\therefore y = Ae^{2x} + Be^{3x}$

$I\,K \rightarrow$ **misalkan** $y = C\,cos\,4x + D\,sin\,4x$

$\frac{dy}{dx} = -4C\,sin\,4x + 4D\,cos\,4x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -16C\,cos\,4x - 16D\,sin\,4x$

$-16C\,cos\,4x - 16D\,sin\,4x + 20C\,sin\,4x - 20D\,cos\,4x + 6C\,cos\,4x + 6D\,sin\,4x = 2\,sin\,4x$

$(20C - 10D)\,sin\,4x - (10C + 20D)\,cos\,4x = 2\,sin\,4x$

$20C - 10D = 2 \quad \rightarrow C = \frac{2}{25}\,; D = -\frac{1}{25}$

$I\,K \therefore y = \frac{1}{25}(2\,cos\,4x - sin\,4x)$

$\therefore$ **Penyelesaian Umum:** $y = Ae^{2x} + Be^{3x} + \frac{1}{25}(2\,cos\,4x - sin\,4x)$

Contoh:

Selesaikanlah $\frac{d^2y}{dx^2} + 14\frac{dy}{dx} + 49y = 4e^{5x}$

Solusi : $FK \rightarrow m^2 + 14m + 49 = 0 \rightarrow (m+7)(m+7) = 0$

$m = -7 \; \& \; m = -7$

$FK \rightarrow y = e^{-7x}(A + Bx)$

$I\,K \rightarrow y = Ce^{5x} \quad \rightarrow \frac{dy}{dx} = 5Ce^{5x} \quad \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 25Ce^{5x}$

$25Ce^{5x} + 14(5Ce^{5x}) + 49(Ce^{5x}) = 4e^{5x}$

Bagi kedua sisi dengan e^{5x}

Maka $\rightarrow$ $25C + 70C + 49C = 4 \quad \rightarrow 144C = 4 \quad \rightarrow C = \frac{1}{36}$

$I\,K = \frac{1}{36}e^{5x}$

$\therefore$ **Penyelesaian Umum:** $y = e^{-7x}(A + Bx) + \frac{1}{36}e^{5x}$

Bagaimana menentukan nilai A & B; nilai A & B dapat dicari bila ada informasi tambahan.

Contoh:

Selesaikan persamaan berikut:

$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 5y = 13e^{3x}$; jika $x = 0, y = \frac{5}{2}$ dan $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$

Solusi:

$$FK \rightarrow m^2 + 4m + 5 = 0 \rightarrow m = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4 \pm j\,2}{2}$$

$$m = -2 \pm j \quad \rightarrow y = e^{-2x}(A\cos x + B\sin x)$$

$$IK;\ y = Ce^{3x} \quad \rightarrow \frac{dy}{dx} = 3Ce^{3x};\ \frac{d^2y}{dx^2} = 9Ce^{3x}$$

$$9Ce^{3x} + 12Ce^{3x} + 5Ce^{3x} = 13e^{3x}$$

$$26C = 13 \quad \rightarrow C = \frac{1}{2} \quad \rightarrow IK\,adalah\ y = \frac{e^{3x}}{2}$$

$\therefore$ **Penyelesaian Umum:** $y = e^{-2x}(A\cos x + B\sin x) + \frac{e^{3x}}{2}$

Karena $x = 0 \quad \rightarrow y = \frac{5}{2}$

$$\frac{5}{2} = A + \frac{1}{2} \quad \rightarrow A = 2 \quad \rightarrow y = e^{-2x}(2\cos x + B\sin x) + \frac{e^{3x}}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-2x}(-2\sin x + B\cos x) - 2e^{-2x}(2\cos x + B\sin x) + \frac{3e^{3x}}{2}$$

$$x = 0 \quad \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \frac{1}{2} = B - 4 + \frac{3}{2} \quad \rightarrow B = 3$$

$\therefore$ **Penyelesaian Umum:** $y = e^{-2x}(2\cos x + 3\sin x) + \frac{e^{3x}}{2}$

INGAT!!

Dari persamaan sebelumnya

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + c\,y = f(x)$$

Bila $f(x) = 0 \quad \rightarrow$ **disebut persamaan <u>homogen orde-kedua</u>**

Bila $f(x) \neq 0 \quad \rightarrow$ **disebut persamaan <u>non homogen orde-kedua</u>**