BAB IV
EKSPEKTASI MATEMATIK

4.1. Rata-rata variabel acak

Bila dua koin dilemparkan sebanyak 16 kali dan *X* adalah jumlah depan (atas) yang muncul setiap kali pelemparan. Sehinga nilai *X* adalah 0,1, atau 2. Misalkan dari hasil percobaan menunjukkan bahwa tanpa depan, satu depan, dan dua-duanya depan adalah masing-masing 4, 7 dan 5. Maka jumlah **rata-rata** depan yang muncul setiap satu lemparan dari 2 koins tersebut adalah:

$$\frac{(0)(4)+(1)(7)+(2)(5)}{16}=1.06$$

Perhitungan diatas dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$(0)\left(\frac{4}{16}\right)+(1)\left(\frac{7}{16}\right)+(2)\left(\frac{5}{16}\right)=1.06$$

nilai 4/16, 7/16, dan 5/16 disebut sebagai fraksi atau frekuensi relatif, sehingga kita bisa menghitung nilai rata-rata dengan nilai tertentu yang terjadi dan nilai frekuensinya. Nilai rata-rata (mean), μ, atau nilai yang diperkirakan (expected), *E*(*X*) dari percobaan diatas dapat ditulis sebagai:

$$\mu=E(X)=(0)\left(\frac{4}{16}\right)+(1)\left(\frac{7}{16}\right)+(2)\left(\frac{5}{16}\right)=1.06$$

DEFINISI: Bila *X* adalah suatu variabel acak dengan distribusi probabilitas *f*(*x*), **rata-rata atau nilai yang diperkirakan (mean or expected)** dari *X* adalah:

$$\mu=E(x)=\sum_{x} xf(x) \rightarrow \text{Bila } X \text{ diskrit}$$

$$\mu=E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \rightarrow \text{Bila } X \text{ menerus}$$

Contoh: sebuah kotak berisi 7 alat (komponen), 4 alat kondisinya baik, 3 rusak. Bila 3 sampel diambil, berapa nilai perkirakan (expected) sampel yang diambil tersebut adalah baik.

Solusi: Bila *X* menunjukkan alat yang baik dalam sampel. Distribusi probabilitas dari *X* adalah:

$$f(x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{3}{3-x}}{\binom{7}{3}}, \quad \text{untuk } x = 0,1,2,3$$

dari hasil perhitungan diperoleh *f*(0) = 1/35, *f*(1)=12/35, *f*(2)=18/35, dan *f*(3)=4/35. Oleh karena itu:

$$\mu = E(X) = (0)\left(\frac{1}{35}\right) + (1)\left(\frac{12}{35}\right) + (2)\left(\frac{18}{35}\right) + (3)\left(\frac{4}{35}\right) = 1.7$$

Contoh: Misalkan *X* adalah variabel acak yang menunjukkan umur (jam) dari suatu alat elektronik. Bila fungsi kepadatan probabilitasnya adalah:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{20000}{x^3}, \ldots\ldots\ldots x > 100 \\ 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, selainnya \end{cases}$$

tentukan umur perkiraan alat elektronik tersebut.

Solusi:

$$\mu = E(x) = \int_{100}^{\infty} x \frac{20000}{x^3} dx = \int_{100}^{\infty} \frac{20000}{x^2} dx = 200$$

TEOREMA: Misalkan *X* adalah suatu variabel acak dengan distribusi probabilitas *f*(*x*), rata-rata atau nilai yang diperkirakan dari variabel acak *g*(*X*) adalah:

$$\mu_{g(X)} = E[g(X)] = \sum g(x) f(x)$$ → Bila *X* diskrit

$$\mu_{g(X)} = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$ → Bila X menerus

Contoh: Misalkan jumlah kendaraan X yang dicuci selama 1 jam (4-5 sore) memiliki distribusi probabilitas sebagai berikut:

x	4	5	6	7	8	9
P(X=x)	1/12	1/12	¼	¼	1/6	1/6

Bila g(X)=2X -1 menunjukkan jumlah uang yang diperoleh dari hasil tsb (dolar). Tentukan perkiraan hasil yang diperoleh selama waktu tersebut.

Solusi:

$$E[g(X)] = \sum_{4}^{9} (2x-1) f(x) = (7)\left(\frac{1}{12}\right) + (9)\left(\frac{1}{12}\right) + (13)\left(\frac{1}{4}\right) + (15)\left(\frac{1}{6}\right) +$$
$$(17)\left(\frac{1}{6}\right) = 12.67\$$$

Contoh: Bila X adalah variabel acak dengan fungsi kepadatan sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{3}, \ldots\ldots\ldots -1 < x < 2 \\ 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots selainnya \end{cases}$$

Tentukan perkiraan nilai (rata-rata) dari g(X)= 4X+3

$$\mu_{g(X)} = E[g(4X+3)] = \int_{-1}^{2} \frac{(4x+3)x^2}{3} dx = 8$$

DEFINISI: Misalkan X dan Y adalah variabel acak dengan distribusi probabilitas gabungan $f(x,y)$. rata-rata atau nilai yang diperkirakan dari variabel acak $g(X,Y)$ adalah:

$$\mu_{g(X,Y)} = E[g(X,Y)] = \sum_{x} \sum_{y} g(x,y) f(x,y)$$ → Bila X dan Y diskrit

$$\mu_{g(X,Y)} = E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y) dxdy$$ → Bila *X* dan *Y* menerus

Contoh: Tentukan $E\left(\frac{Y}{X}\right)$ untuk fungsi kepadatan:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x(1+3y^2)}{4}, \ldots\ldots\ldots 0 < x < 2, 0 < y < 1 \\ 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots selainnya \end{cases}$$

Solusi:

$$E\left[\left(\frac{Y}{X}\right)\right] = \int_0^1\int_0^2 \frac{y(1+3y^2)}{4} dxdy = 5/8$$

4.2 Varians dan Covarians

Rata-rata atau nilai yang diperkirakan dari suatu vaiabel acak sangat penting untuk menggambarkan bagaimana pusat distribusi probabilitas. Namun hal itu tidak cukup karena suatu bentuk distribusi bisa jadi rata-ratanya sama tapi memiliki sebaran yang berbeda, karena itu diperlukan ukuran variabilitas dari suatu variabel acak. Hal ini dinyakan dengan varian , Var(*X*).

DEFINISI: Misalkan *X* adalah variabel acak dengan distribusi probabilitas *f*(*x*) dan rata-rata μ. Varians dari *X* adalah:

$$Var(X) = \sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sum_x (x-\mu)^2 f(x)$$ → Bila *X* diskrit

$$Var(X) = \sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx$$ → Bila *X* menerus

Deviasi standar dari *X* adalah $\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\sigma^2}$

Soal: Misalkan variael acak *X* menunjukkan jumlah mobil yang digunakan untuk urusan kantor pada suatu waktu tertentu. Distribusi probabilitas untuk perusahaan

A adalah:

x	1	2	3
$f(x)$	0.3	0.4	0.3

Sedangkan pada perusahaan B adalah:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.2	0.1	0.2	0.3	0.2

Tunjukkan bahwa variansi distribusi probabilitas perusaan B lebih besar dari A

TEOREMA: Varians dari suatu variabel acak *X* adalah

$$\sigma^2 = E(X)^2 - \mu^2$$

Soal:Permintaan pekanan sebuah perusahaan minuman, dalam ribuan liter, adalah variabel acak *X* dengan dengan kepadatan probaibilitas sbb:

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1)\text{.........}1 < x < 2 \\ 0,\text{................}selainnya \end{cases}$$

tentukan rata-rata dan varians dari *X*.

TEOREMA: Misalkan *X* adalah variabel acak dengan distribusi probabilitas *f*(*x*). Varians dari variabel acak *g*(*X*) adalah:

$$\sigma^2_{g(X)} = E\left\{\left[g(X) - \mu_{g(X)}\right]^2\right\} = \sum_x \left[g(x) - \mu_{g(X)}\right]^2 f(x) \rightarrow \text{Bila } X \text{ diskrit}$$

$$\sigma^2_{g(X)} = E\left\{\left[g(X) - \mu_{g(X)}\right]^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[g(x) - \mu_{g(X)}\right]^2 f(x)dx \rightarrow \text{Bila } X \text{ menerus}$$

Contoh: Hitung varians dari *g*(*X*)=2*X* + 3, X adalah variabel acak dengan distribusi probabilitas sbb:

x	0	1	2	3
$f(x)$	¼	1/8	½	1/8

Solusi:

Rata-rata: $\mu_{2X+3} = E(2X+3) = \sum_{x=0}^{3} (2x+3) f(x) = 6$

Varians: $\sigma^2_{2x+3} = E\{[(2x+3) - \mu_{2x+3}]^2\} = E\{[(2x+3) - 6]^2\} = E\{[2x+3-6]^2\} = E(4x^2 - 12x + 9) = \sum_{x=0}^{3} (4x^2 - 12x + 9) f(x) = 4$

DEFINISI: Misalkan *X* dan *Y* adalah variabel acak dengan distribusi probabilitas gabungan *f*(*x*,*y*). Covarians dari *X* dan *Y* adalah

$\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \sum_x \sum_y (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f(x,y)$ →Bila *X* dan *Y* diskrit

$\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f(x,y) dxdy$ →Bila X dan *Y* menerus.

Covarians merupakan suatu ukuran sifat hubungan antara 2 variabel. Bila nilai X tinggi, nilai Y juga tinggi serta bila nilai $X - \mu_x$, $Y - \mu_y$ juga tinggi; maka hasil kali $(X - \mu_x)(Y - \mu_y)$ positif. Namun bila hasil kali negatif, nilai nilai X tinggi → nilai Y kecil. Nilai Covarians dapat juga dihitung dengan rumus berikut.

TEOREMA: Covarians dari dua variabel acak *X* dan *Y* dengan rata-rata μ_X dan μ_Y adalah: $\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X \mu_Y$

Contoh: Fraksi *X* dari pelari laki-laki dan fraksi *Y* dari pelari wanita yang bersaing pada pertandingan maraton dinyatakan dengan fungsi kepadatana gabungan berikut:

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy.........0 \le x \le 1, 0 \le y \le x \\ 0,................selainnya \end{cases}$$

Tentukan covarians dari *X* dan *Y*

Solusi: Pertama hitung fungsi kepadatan marjinal.

$$g(x)=\begin{cases}4x^3 ....0 \le x \le 1\\ 0,................ selainnya\end{cases}$$

$$h(y)=\begin{cases}4y(1-y^2).........0 \le y \le 1\\ 0,................ selainnya\end{cases}$$

Hitung rata-rata:

$$\mu_x = E(X) = \int_0^1 4x^4 dx = 4/5; \qquad \mu_y = E(Y) = \int_0^1 4y^2(1-y^2)dy = 8/15;$$

$$E(XY) = \int_0^1 \int_y^1 8x^2y^2 dxdy = 4/9$$

Maka: $\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_x\mu_y = \frac{4}{9} - \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{8}{15}\right) = \frac{4}{225}$

DEFINISI: Misalkan X dan Y adalah variabel acak dengan Covarians σ_{XY} dan deviasi standar σ_X dan σ_Y . Koefisien korelasi X dan Y adalah

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Koefesien korelasi memiliki nilai $-1 \le \rho_{xy} \le 1$, mendekati 1 menunjukkan korelasi yang kuat antara X dan Y.

4.3 Rata-rata dan Varians dari kombinasi linier variabel acak

TEOREMA: bila a dan b adalah konstan, maka:

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

TEOREMA: Nilai yang diperkirakan (expected value) dari suatu penjumlahan atau pengurangan dua atau lebih fungsi dari suatu variabel acak X adalah jumlah atau pengurangan nilai yang diperkirakan dari fungsi tersebut.

$$E[g(X) \pm h(X)] = E[g(X)] \pm E[h(X)]$$

TEOREMA: Nilai yang diperkirakan (expected value) dari suatu penjumlahan atau pengurangan dua atau lebih fungsi dari suatu variabel acak X dan Y adalah jumlah atau pengurangan nilai yang diperkirakan dari fungsi tersebut.

$$E[g(X,Y) \pm h(X,Y)] = E[g(X,Y)] \pm E[h(X,Y)]$$

TEOREMA: Misalkan X dan Y adalah dua variabel acak bebas, maka

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

TEOREMA: bila a dan b adalah konstan, maka:

$$\sigma^2_{aX+b} = a^2\sigma^2_{aX} = a^2\sigma^2$$

TEOREMA: bila X dan Y adalah variabel acak dengan distribusi probabilitas gabungan $f(x,y)$, maka:

$$\sigma^2_{aX+bY} = a^2\sigma^2_X + b^2\sigma^2_Y + 2ab\sigma_{XY}$$